福建省《高等代数》与《线性代数》课程建设第十四次研讨会*教学心得

矩阵对角化问题的“程序”判别法

集美大学 朱荣坤

矩阵的对角化问题是线性代数的教学难点之一。原因在于：学生往往误以为对角化就是给定矩阵可以通过初等变换化为对角形、搞不清楚特征值与特征向量在对角化问题中固有的核心作用；另一方面，对角化的条件中有的是充分必要的，有的则仅为充分的，逻辑性强，学生易混淆。

我们知道，n 阶矩阵 A 可对角化的充要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量，所以当 n 阶矩阵 A 有 n 个不同的特征值时，必可对角化，但反之不然！换句话说，当特征值出现重根时，并不能直接确定是否可对角化，需要作进一步的判断，而这点正是学生容易犯错之处，教学中必须多加强调与分析！

对特征值出现重根的情况，必须进一步确定对应的线性无关的特征向量个数：

如果 n 阶矩阵 A 的每个特征值重根对应的线性无关的特征向量个数等于重数，那么线性无关的特征向量总数就等于重数之和，即 n 个，这样 A 就可对角化，此时条件相当于 k 重特征值 λ_0 满足 $r(\lambda_0 E - A) = n - k$ 。

反之，如果 n 阶矩阵 A 可对角化，设所有互异特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$，对应重数为 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，则

$$A \sim diag(\lambda_1 E_{k_1}, \lambda_2 E_{k_2}, \cdots, \lambda_s E_{k_s})$$

$$\lambda_1 E - A \sim diag(0E_{k_1}, (\lambda_1 - \lambda_2)E_{k_2}, \cdots, (\lambda_1 - \lambda_s)E_{k_s})$$

即得 $$r(\lambda_1 E - A) = n - k_1$$

同理，其他特征值也成立，即 k 重特征值 λ_0 满足 $r(\lambda_0 E - A) = n - k$ 。

可见，“每个特征值重根对应的线性无关的特征向量个数等于重数”是可对角化的一个充分必要条件。这个方法的好处在于无需具体求出特征向量，而实际上许多对角化问题中的特征向量往往是不可求的。

把以上分析过程用程序框图加以显示，就得到 n 阶矩阵 A 对角化的判别程序：

$\boxed{\text{先求 } A \text{ 的特征值}}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{不可对角化}} \xleftarrow{\text{否}} \boxed{\text{是否有 } n \text{ 个不同的特征值？}} \xrightarrow{\text{是}} \boxed{\text{可对角化}}$

（错！）　　$\downarrow$ 否（有重根）

$\boxed{\text{每个特征值的重数是否等于它的线性无关的特征向量总数？}}$

$\updownarrow$（等价）

$\boxed{\text{不可对角化}} \xleftarrow{\text{否}} \boxed{\text{是否有 } n \text{ 个线性无关的特征向量？}} \xrightarrow{\text{是}} \boxed{\text{可对角化}}$

其中，k 重特征值 λ_0 有 k 个线性无关特征向量当且仅当 $r(\lambda_0 E - A) = n - k$ 。

实践表明，采用“程序”判别法进行教学，直观明了，层次分明，方法清晰，学生易于接受且方法得当，可以取得优良的教学效果。

当然，矩阵的对角化问题还有其他简便判别方法，比如数域 P 上矩阵 A 可对角化的充要条件是 A 的最小多项式是 P 上互素的一次因式的乘积，但这已超出线性代数的教学要求了。

例 1　k 取何值时，$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可对角化？

解　特征多项式 $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$，可对角化的充分必要条件是特征值二重根 1 对应 2 个线性无关的特征向量，即 $r(E - A) = 1$，求得 $k = -1$。

例 2 （2004 数学①）如果矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & k & 5 \end{pmatrix}$ 的特征多项式有一个二重根，试求 k 的值，并讨论 A 是否可相似对角化。

解　特征多项式 $|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3k)$

如果 2 是特征多项式的二重根，则也是 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3k = 0$ 的根，代入得 $k = -2$，此时，可求 A 的特征值为 2，2，6 ，且 $r(2E - A) = 1$，故 A 可对角化。

如果 2 不是二重根，则 $\lambda^2 - 8\lambda + 18 + 3k = 0$ 有重根，由判别式等于零，得 $k = -\dfrac{2}{3}$，此时，可求 A 的特征值为 2，4，4，且 $r(4E - A) = 2$，不可对角化。